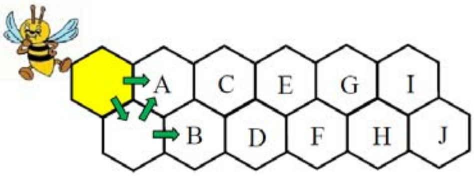
Torsten FRITZLAR, Halle an der Saale

Zum Beweisbedürfnis im jungen Schulalter

Das Beweisen oder argumentierende Begründen – zumindest an dieser Stelle möchte ich dazwischen nicht unterscheiden (vgl. Ambrus, 1992) – hat für die Mathematik und den Mathematikunterricht eine enorme Bedeutung, weshalb an der Entwicklung entsprechender Fähigkeiten und Bereitschaften bereits von der ersten Klasse an gearbeitet werden sollte (z. B. Rehm, 1992; Winter, 1983). Ein wichtiges Ziel ist dabei die Ausbildung eines Beweisbedürfnisses: Die Lernenden sollen zum einen erkennen und anerkennen, dass mathematische Aussagen auf „fachmathematische Art" bewiesen werden müssen (objektives Beweisbedürfnis) und zum anderen einen persönlichen Drang entwickeln, einen Beweis zu finden oder zu erfahren (subjektives Beweisbedürfnis) (Winter, 1983). Aus verschiedenen Untersuchungen weiß man allerdings, dass das Beweisbedürfnis bei jungen Mathematiklernenden in der Regel nur sehr gering ausgeprägt ist (z. B. Bezold, 2008; Steinweg, 2001).

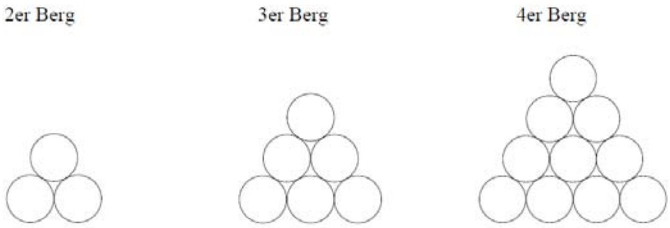
Zur Beschreibung mathematischer Begabungen gibt es verschiedene fachdidaktische Ansätze. Im Modell von Käpnick und Fuchs zur Entwicklung mathematischer Begabungen im Grundschulalter und darüber hinaus (Fritzlar et al., 2006) finden sich keine Hinweise zu besonderen argumentativen Fähigkeiten oder zu einem stärker ausgeprägten Beweisbedürfnis, im Modell von Heinze wird dagegen das „Bedürfnis nach plausiblen, mathematischen Erklärungen und Streben nach Erkenntnissen" als Merkmal eines mathematischen Talents im Grundschulalter benannt (Heinze, 2005, S. 39).

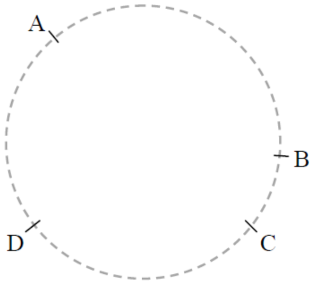
Das bisher Skizzierte motivierte mich, in einer Fallstudie nach möglichen Unterschieden hinsichtlich des Beweisbedürfnisses zu suchen zwischen nicht ausgewählten Lernenden und Schülerinnen und Schülern, die aufgrund eines mathematikspezifischen Tests als mathematisch begabt oder zumindest sehr leistungsstark gelten. In diesem Rahmen wurde in verschiedenen regulären Klassen der dritten, vierten und fünften Jahrgangsstufe, in Fördergruppen für mathematisch interessierte oder begabte Dritt- und Viertklässler sowie in den fünften Klassen eines Spezialgymnasiums mit mathematisch–naturwissenschaftlicher Schwerpunktsetzung ein zweistündiger Unterrichtsversuch durchgeführt. In jeder Gruppe wurden vier Problemstellungen eingesetzt, bei deren Bearbeitung auch jüngere Lernende schnell Zahlenmuster konstruieren können, die einfach zu beschreiben und durch Rückgriff auf den durchschaubaren Entstehungsprozess leicht zu begründen sind. Die jeweils zu bearbeitenden Situationen und einführenden Fragen zeigt die Abbildung auf der folgenden Seite.



Eine Biene läuft über ihre Waben. Sie beginnt ganz links und bewegt sich immer nach rechts: genau nach rechts, nach rechts oben oder nach rechts unten.
Auf wie vielen verschiedenen Wegen kann die Biene die Waben A, B, C, D, … erreichen?

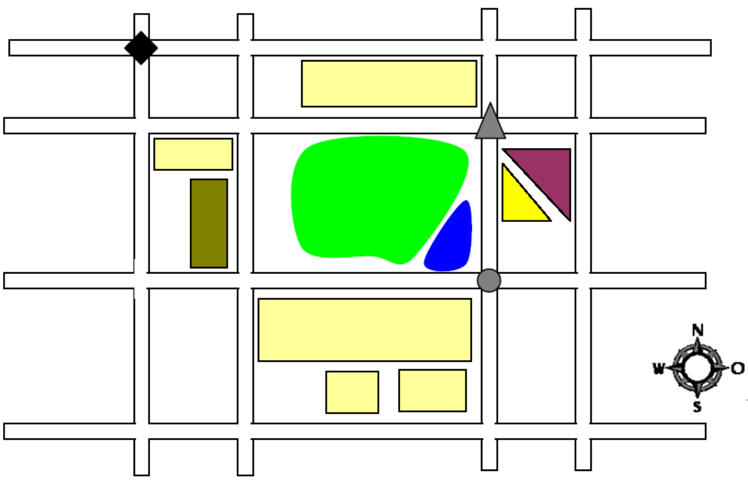
Ein Wanderer möchte von der Bergspitze auf dem kürzesten Weg nach unten laufen. Dort wo sich die Kreise berühren, darf er von Kreis zu Kreis wandern.
Wie viele verschiedene Wege gibt es bei den abgebildeten Bergen jeweils?





Auf einem Kreis wurden vier beliebige Punkte ausgewählt. Wie viele Linien werden benötigt, um jeden dieser Punkte mit jedem anderen zu verbinden?

Johannes verbringt den Urlaub mit seinen Eltern in einer amerikanischen Großstadt. Die Abbildung zeigt einen kleinen Ausschnitt aus dem Stadtplan. Die Straßen bilden in diesem Stadtviertel ein rechteckiges Muster.
Johannes befindet sich auf der Kreuzung, die mit dem schwarzen Quadrat gekennzeichnet ist.
Er möchte zur Kreuzung mit dem grauen Dreieck, denn dort ist das Hotel.
Wie viele Wege kann Johannes nehmen, wenn er keinen Umweg gehen will?



Begonnen wurde stets mit den „Bienenwaben“. Bei der Auseinandersetzung damit konstruierten die Lernenden in allen Gruppen verschiedene Zahlenmuster, die zu unterschiedlichen Fortsetzungsmöglichkeiten (12 oder 13 Wege in die Wabe F) führten.

Zur Entscheidungsfindung hinsichtlich der Anzahl der Wege in die Wabe F schlugen die Schüler(innen) neben dem aufwändigen und fehleranfälligen Probieren zunächst oft eine „demokratische Abstimmung“ oder die leichtere Verständlichkeit eines Musters als Kriterium vor. In einem anschließenden Unterrichtsgespräch wurde das diesbezügliche Potenzial einer begründenden Argumentation beispielsweise ausgehend vom Entstehungsprozess der Zahlenfolge herausgearbeitet und so die Suche nach einer Begründung für die Allgemeingültigkeit eines Musters für die Lernenden nach Möglichkeit sinnvoll gemacht. In der Tat konnte auch in allen Schülergruppen eine Begründung für das Fibonacci-Muster – gelegentlich mit leichter Unterstützung durch die Lehrperson – gefunden werden.
Im Anschluss wählten die Schüler(innen) weitere Problemstellungen zur Bearbeitung aus, wobei sie jeweils ein Muster in den Anzahlfolgen konstruieren und begründen sollten, warum dieses auch für hohe Berge, viele Punkte auf dem Kreis bzw. weit entfernte Kreuzungen gilt. Mich interessierte insbesondere: *Lassen sich zwischen den Schülergruppen Unterschiede identifizieren hinsichtlich der Begründungen für die Allgemeingültigkeit der Muster,* nachdem anhand der „Bienenwaben“ herausgearbeitet wurde, welche Bedeutung Begründungen in diesem Zusammenhang haben?

An dieser Stelle kann ich lediglich Erfahrungen andeuten, die ich im fünften Jahrgang an einem regulären (zwei Klassen) und einem Spezialgymnasium mit mathematisch – naturwissenschaftlicher Ausrichtung und entsprechendem Aufnahmeverfahren (drei Klassen) sammeln konnte.
In allen Klassen fanden viele Schülerinnen und Schüler bei mehreren der zur Auswahl stehenden Problemstellungen passende Zahlenmuster, auch das vielleicht etwas schwierigere Additionsmuster zu den „kürzesten Wegen“ wurde in allen Klassen gefunden. Eine Begründung für die vermutete Allgemeingültigkeit oder auch nur Begründungsansätze (im mathemati-

schen Sinne) wurden allerdings ausgesprochen selten notiert, in der Regel wurde auf entsprechende Aufforderung das bereits konstruierte Muster noch einmal beschrieben, dessen prinzipielle Fortsetzbarkeit „bis ins Unendliche“ angeführt oder angegeben, dass weitere Beispiele positiv getestet wurden. Und hinsichtlich meiner Fragestellung wesentlich: Zwischen der Gruppe der mathematisch begabten (oder zumindest sehr leistungsstarken) und der Gruppe der nichtausgewählten Lernenden deuteten sich *weder quantitative noch qualitative Unterschiede im Streben nach einer Begründung im mathematischen Sinne* an.

Auch wenn aus dieser Fallstudie aufgrund der geringen Teilnehmerzahl und der Verwendung nur eines Typs von Problemstellungen lediglich erste Eindrücke gewonnen werden können, deutet sich für mich zum einen an, dass auch das Beweisbedürfnis von Lernenden stärker erfahrungs- (statt begabungs-) abhängig sein könnte. Zum anderen können die Ergebnisse auch als weiteres Indiz dafür gesehen werden, dass logische Argumentationen bei jungen Schülerinnen und Schülern nur einen geringen Stellenwert und wenig Überzeugungskraft im Vergleich zu empirischen Daten haben (vgl. Stein, 1999, S. 25).

Literatur

Ambrus, A. (1992). Indirektes Argumentieren, Begründen, Beweisen im Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker.

Bezold, A. (2008). Beweisen – argumentieren – begründen: Entwicklung von Argumentationskompetenz im Mathematikunterricht. Grundschulmagazin, 76 (6), 35 – 40.

Fritzlar, T., Rodeck, K., & Käpnick, F. (2006). Mathe für kleine Asse. 5. / 6. Schuljahr. Berlin: Cornelsen.

Heinze, A. (2005). Lösungsverhalten mathematisch begabter Kinder – aufgezeigt an ausgewählten Problemstellungen. Münster: LIT Verlag.

Rehm, M. (1992). Beweisen und Begründen bereits in der Grundschule? Überlegungen und Beispiele. Mathematik in der Schule, 30 (3), 148 – 155.

Stein, M. (1999). Elementare Bausteine der Problemlösefähigkeit: logisches Denken und Argumentieren. Journal für Mathematikdidaktik, 20 (1), 3 – 27.

Steinweg, A. S. (2001). Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern. Münster: LIT Verlag.

Winter, H. (1983). Zur Problematik des Beweisbedürfnisses. Journal für Mathematikdidaktik, 4 (1), 59 – 95.